التمرين الأول

نعتبر الدالة f المعرفة على $IR-\{1\}$ بما يلي :

$$\begin{cases} f(x)=\dfrac{\ln(x+1)}{\ln x} & ; x>0 \\ f(x)=(x+2)e^{\frac{1}{x}} & ; x<0 \\ f(0)=0 \end{cases}$$

وليكن (C) المنحنى الممثل للدالة f في معلم متعامد ممنظم

1- أ- احسب $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x)$ 1

ب- بين أن: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$ وأول النتيجة هندسيا 1

2- أ - بين أن الدالة f متصلة في 0 1

ب- بين أن الدالة f قابلة للاشتقاق في 0 وأن $f'(0)=0$ وأول النتيجة هندسيا 1 + 1

3- أ- بين أن: $f'(x)=\dfrac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}(x^2-x-2)$ لكل x من IR^{-*} ، ثم ادرس تغيرات الدالة f على IR^{-*} 1

ب- بين أن : $x\ln x-(x+1)\ln(x+1)<0 \quad (\forall x\in]0,+\infty[)$ ، ثم ادرس تغيرات الدالة f على $IR^{+*}-\{1\}$ 1

ج- أعط جدول تغيرات الدالة f 1

4- أ- بين أن : $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)-(x+3))=0$ 1

ب - أنشئ المنحنى (C) (لاحظ أن $f(-2)=0$ و $\frac{1}{e}\simeq0,4$) 1,5

5- أ- بين أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α في المجال $]1,+\infty[$ وأن : $1,76<\alpha<1,78$ 1

ب- تحقق من أن : $f(]1,+\infty[)=]1,+\infty[$ 0,50

6 - لتكن g قصور f على المجال $]1,+\infty[$. نضع: $h=gog$

ونعتبر المتتالية (u_n) المعرفة بما يلي : $u_0=\dfrac{3}{2}$ و $u_{n+1}=h(u_n)$ لكل n من $\mathbb{N}$

أ- بين أن : $1 < u_n < \alpha$ لكل n من $\mathbb{N}$. | 1

ب- نفترض أنه يوجد عدد حقيقي k من $]0,1[$ بحيث $|h'(x)| \le k$ $(\forall x \in]1,\alpha[)$ | 1

بين باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية أن المتتالية (u_n) متقاربة وأن نهايتها α

الثاني : في المجموعة $\mathbb{Z}^2$ نعتبر المعادلة: $(E): 8x-5y=3$ و (S) مجموعة تعريفها.

1) بين ان $S \neq \{\phi\}$, ثم حل المعادلة (E),

2) ليكن m من $\mathbb{Z}$ بحيث يوجد زوج $(p;q)$ من $\mathbb{Z}^2$ يحقق: $m=8p+5$ و $m=5q+8$.

بين أن : $(p;q) \in (S)$.

استنتج ان : $m \equiv 13[40]$.

3) حدد أصغر قيم m الأكبر من 2000.

4) بين أن : $\forall k \in \mathbb{Z} : 2^{3k} \equiv 1[7]$.

5) حدد باقي القسمة الاقليدية للعدد 2^{2014} على 7.

6) تحقق أن 97 عدد أولي, ثم بين أن : $2^{96} \equiv 1[679]$.